

ПРЕДМЕТ

< ОБРАДА РЕЗУЛТАТА МЕРЕЊА >

Предавање број 5

**<** **ЗАОКРУЖИВАЊЕ** **>**

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Недеља | Наставна јединица | Тематске јединице | Резултат – знања или вештине које студент треба да добије |
| 5 | Заокруживање | Значајне, сигурне, сумњиве и непотребне цифре. Правила за заокруживање бројева. Правила за заокруживање резултата мерења. | Упознавање са правилима за заокруживање бројева и резултата мерења. |

Copyright © 2016 – Факултет медицинских наука Универзитета у Крагујевцу. Сва права задржана. Без претходне писмене дозволе од стране Факултета медицинских наука забрањена је репродукција, трансфер, дистрибуција или меморисање неког дела или читавих садржаја овог документа, копирањем, снимањем, електронским путем, скенирањем или на било који други начин.

Copyright © 2016 – Faculty of Medical Sciences of University of Kragujevac. All rights reserved. No part of this publication may be reproduced, stored in a retrieval system or transmitted in any form or by any means, electronic, mechanical, photocopying,, recording, scanning or otherwise, without the prior written permission of Faculty of Medical Sciences.

**САДРЖАЈ**

[Заокруживање бројних вредности 2](#_Toc463774839)

[Заокруживање бројева који се односе на резултате мерења 2](#_Toc463774840)

[Значајне, сигурне, сумњиве и непотребне цифре 2](#_Toc463774841)

[Правила за заокруживање бројева 3](#_Toc463774842)

[Правила за заокруживање резултата мерења 4](#_Toc463774843)

[Један алтернативни поступак за изражавање апсолутне грешке 5](#_Toc463774844)

[Још неки примери 5](#_Toc463774845)

Предавање бр. 15

**<** **ЗАОКРУЖИВАЊЕ >**

# Заокруживање бројних вредности

## Заокруживање бројева који се односе на резултате мерења

Приликом обраде експерименталних података, раније или касније, биће потребно да се бројеви добијени рачунским путем заокруже на потребан број цифара. За то треба знати:

* како се бројеви заокружују,
* на коју тачност треба извршити заокруживање,
* и када треба вршити заокруживање израчунатих бројева.

Пре него што одговоримо на постављена питања морамо се подсетити на неке детаље из нумеричке математике.

### Значајне, сигурне, сумњиве и непотребне цифре

У цивилизацији у којој живимо, бројеве приказујемо помоћу такозваног декадног бројног система. У том систему користимо десет цифара (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9). У декадном запису неког броја вредност коју нека цифра има зависи од позиције те цифре у запису. Тако на пример, у броју 27335,443 цифра „7“ означава да има седам хиљада, док у броју 24335,473 та иста цифра означава да има седам стотих делова. У декадном запису бројева, нула игра посебну улогу. Наиме, нуле се пишу да би се остале цифре довеле у одговарајућу позицију. На пример, ако желимо да напишемо „двадесет три милиона“ употребићемо цифре „2“, „3“ и иза њих још шест нула (23000000). Да бисмо написали „двадесет три хиљадита’’ употребићемо исте цифре „2“ и „3“, али овога пута испред њих морају доћи три нуле (0,0023).

У случају бројева који се односе на резултате мерења, ситуација се компликује тиме што те бројеве никада не познајемо тачно, него увек са неком експерименталном грешком. Бројеви који се односе на резултате мерења најчешће нису они који се непосредно очитавају са мерног инструмента, него су добијени одређеним математичким операцијама над тим непосредно очитаним вредностима.

Било како било, бројеви о којима је овде реч носе у себи одређену информацију о мереној величини. Самим тим, и цифре које се појављују у декадном запису тих бројева садрже део те информације. С наше тачке гледишта, *значајне цифре* су оне које садрже релевантну информацију о мереној величини (то може бити било која од цифара (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9), за разлику од цифара које су употребљене да би се значајне цифре у декадном запису довеле у исправну позицију (то може да буде искључиво цифра 0).

***Пример 1***. Када се каже да у процесу добивања гвожђа температура у доњем делу високе пећи износи 1800 oC, онда су „1“ и „8“ значајне цифре, а преостале две нуле нису. Када се каже да степен дисоцијације 0,2 моларног раствора сирћетне киселине износи 0,0095 онда су „9“ и „5“ значајне цифре, а три нуле нису. У хемији 2,0g и 2000g немају исто значење, што је објашњено у следећем примеру. Тамо ћемо видети да су у броју 2,0000 ове четири нуле значајне цифре.

Будући да се ми занимамо за бројеве који су резултати мерења и који су увек познати само у оквиру неке експерименталне грешке, у њиховом декадном запису разликоваћемо *сигурне, сумњиве* и *непотребне цифре*.

Нека је X процена апсолутне грешке неке измерене величине X. Видећемо да (осим у изузетним случајевима) апсолутну грешку изражавамо са једном значајном цифром.

У декадном запису броја X *сигурне цифре* су оне чији су доприноси броју X за један или више редова величина већи од X. *Сумњива цифра* је она чији је допринос броју X исте величине као X. Цифре које у декадном запису долазе иза сумњиве не садрже у себи релевантне информације о мереној величини. То су *непотребне цифре*.

Непотребне цифре по правилу настају као резултат израчунавања (нарочито помоћу рачунских машина, које редовно дају више децимала коначном резултату него што је стварно потребно). *У коначном резултату непотребне цифре треба обавезно изоставити*. Онај ко то не уради, чини грешку и истовремено показује да није савладао основне поступке обраде резултата мерења.

***Пример 2***. У једном хемијском рецепту пише да треба одвагнути 2,0g неке соли. У другом рецепту треба одвагнути 2,0000g исте соли. У чему је разлика? У пракси је веома чест случај да се неки мерни резултат даје без навођења експерименталне грешке. Онда се сматра (али уз потребну меру опреза) да је апсолутна грешка једнака половини декадне јединице која долази иза последње значајне цифре. Конкретно 2,0g треба схватити као 2,0 ± 0,05g. То значи да први рецепт подразумева да треба одвагнути између 1,95 и 2,05 грама соли.То се ради на техничкој ваги, каква се налази у свакој студентској лабараторији.

Други рецепт тражи да се одвагне 2,0000 ± 0,00005 грама соли то јест између 1,99995 и 2,00005 грама. То се може извести само на некој веома прецизној и скупој аналитичкој ваги.

***Пример 3***. Температура од 1800 oC наведена у примеру 1 значи да у одговарајућем делу високе пећи влада температура која има вредност између отприлике 1750 oC и 1850 oC. Другим речима ако за ту температуру кажемо да је 1500 oC онда смо мање погрешили него ако кажемо да је она 1700 oC или 1900 oC. Нико разуман неће схватити да у високој пећи влада температура која је тачно 1800 oC.

***Пример 4***. У примеру 7 за енталпију образовања течне воде који ћемо касније да обрадимо, се појављује број -285,83049. Из разматрања која су тамо описана види се да су цифре „2“ и „8“ (десетице) и „5“ сигурне, да је цифра „8“ (десети делови) сумњива, те да су цифре „3“, „0“, „4“ и „9“ непотребне.

### Правила за заокруживање бројева

У пракси се најчешће јавља потреба да заокружујемо децималне бројеве. Зато ћемо тај случај описати нешто подробније.

Децимални број можемо приказати као . Овде n означава цео број или нулу, d1 је први децимал, d2 је други децимал, итд. На пример, за број 273,14007 је ,, , =0, .

Претпоставимо да имамо неки број са к + h децимала: и да хоћемо да га заокружимо на број са к децимала. Тада се поступа на следећи начин.

1. Ако је мањи од пет, заокружени број има облик
2. Ако је већи од пет, заокружени број има облик . Другим речима, број се повећава за један.
3. Ако је једнак пет и макар један од децимала ... се разликује од нуле, онда се поступа као у случају (2).
4. Ако је једнак пет и сви следећи децимали (уколико их уопште има) су једнаки нули, онда се разликују два случаја. Ако је парно, поступа се као у случају (1). Ако је непарно, поступа се као у случају (2).

***Пример 5***. Заокружити на три децимале следеће бројеве: 1,45549; 2,45977; 3,455501; 4,9985; 5,999500.

Решење: 1,455; 2,460; 3,456; 4,998; 6,000.

Заокруживање бројева на јединицу, десетицу, стотину и слично врши се на потпуно исти начин, што би требало да је јасно из следећег примера.

***Пример 6***. Заокружити на тачност до на стотину следеће бројеве: 145549,88: 245977; 345550,1; 49850; 599950,0.

Решење: 145500; 246000; 345600; 49800; 600000.

### Правила за заокруживање резултата мерења

Да бисмо знали на колико децимала треба заокружити израчунати број X морамо да познајемо процену апсолутне грешке, ΔX. Када се ова процена израчунава, мора се прво извршити заокруживање броја ΔX. Осим у изузетним случајевима, *апсолутну грешку заокружујемо на једну значајну цифру*. Препоручљиво је да се то заокруживање врши навише (а не наниже), као у примеру 7 (испод).

Израчунати број ћемо заокружити на исту тачност као и апсолутну грешку. Ако је апсолутна грешка децимални број (што је најчешће случај) онда израчунати број заокружујемо тако да има исти број децимала као и апсолутна грешка.

**Пример 7**. За енталпију образовања течне воде је на основу сложених термохемијских прорачуна добијена вредност -285,83049 kJ/mol-1. Рачунски одређена процена апсолутне грешке је 0,07872 kJ/mol-1.

Апсолутну грешку ћемо заокружити на 0,08 kJ/mol-1и сходно томе енталпију образовања заокружити на две децимале. Резултат ћемо изразити као -285,83 ± 0,08 kJ/mol-1. Не бисмо много погрешили ни када бисмо писали -285,8 ± 0,1 kJ/mol-1.

Ако би израчуната грешка била 0,07474 kJ/mol-1, и онда бисмо је заокружили на 0,08 kJ/mol-1, дакле навише. Ако би израчуната грешка била 0,07174 kJ/mol-1 онда се можемо одлучити било на (зихерашко) 0,08 kJ/mol-1 или на (ризичније) 0,07 kJ/mol-1. Одлука ће зависити од конкретних околности, а и од менталитета особе која врши обраду података. Не заборавимо да се грешка само процењује и то, како ћемо касније видети, само са одређеном *вероватноћом*.

Заокруживање се мора вршити када дођемо до коначног резултата. Заокруживање међурезултата треба, кад год је то могуће, избегавати. У време када се рачунска обрада резултата вршила ручно (помоћу логаритамских таблица, шибером или “пешке”) заокруживање неких међурезултата била је неминовност. Данас, када се сви иоле заметнији прорачуни врше на електронским рачунским машинама, потпуно је свеједно са коликим бројем децимала радимо. Зато се предлаже следеће правило.

*Приликом рачунске обраде података не треба заокруживати ни један међурезултат, него треба радити с онолико децимала колико калкулатор који користимо дозвољава*. Крајњи резултати се, међутим, морају заокружити (на раније описани начин).

***Пример 8***. Описаћемо једну погубну последицу заокруживања међурезултата (а која се већ много пута догодила на испиту). Топлота топљења неке супстанце на Т = 830 К износи H = 90,72 kJ/mol-1. За процес топљења на Т = 830 K треба израчунати (1) промену ентропије S и (2) промену Гибсове енергије G. При томе се зна да је S = H/Т и G = H-ТS. У вези задатка (2) елементарним резоновањем се закључује да је G = 0. Међутим, студенти често рачунају овако:

1. , то заокружују на, рецимо, 4 децимале и записују као .
2. , што је супротно општем термодинамичком правилу да се Гибсова енергија не мења приликом испаравања.

На овом месту ваљало би (поново) погледати пример 7, који илуструје већину упутстава које смо дали у овом поглављу.

*Напомена 1*: У пракси се понекад догађа да грешка мерења није позната. У таквим случајевима коначне резултате (па и неке важније међурезултате) треба заокружити на онолико децимала колико се захтева у одговарајућем упутству за рад.

### Један алтернативни поступак за изражавање апсолутне грешке

У овом одељку наводимо још један поступак за заокруживање апсолутне грешке (J. F. Caballero, D. F. Harris, *There seems тo be uncertainty about theuse of significant figures inresporting uncertainties of results*, J. Chem. Educ., 75, 1998, 996-996). Према њему, израчунату апсолутну грешку треба заокружити на једну или две значајне цифре, тако да те две цифре образују број између 3 и 30. Другим речима, ако је у процени апсолутне грешке прва од нуле различита цифра једнака 1 или 2, онда се грешка изражава са две значајне цифре, док се у осталим случајевима оставља само једна значајна цифра. Ово конкретно, значи да

* ако је X = 771 и ΔX = 135 онда треба писати: (7,7 ± 1,4) • 102 или 770 ± 140 (значајне цифре су “1” и “4”);
* ако је X = 65.9 и ΔX = 10,1 онда треба писати: (6.6 ± 1,0) • 101 или 66 ± 10 (значајне цифре су “1” и "0’);
* ако је X = 646 и ΔX = 69 онда треба писати: 650 ± 70 (значајна цифра је само “7");
* ако је X = 1.79 и ΔX = 0,78 онда треба писати: 1,8 ± 0.8 (значајна цифра је “8”);
* ако је X = 8450 и ΔX = 850 онда треба писати: 8400 ± 800 (значајна цифра је само “8“ , док две нуле нису); на основу претходно реченог ми бисмо били склони да резултат изразимо као 8400 ± 900;
* ако је X =1.4488 и = 0.0290 онда треба писати: 1,449 ± 0,029;
* ако је, међутим, = 0,0310 онда би требало писати као 1,45 ± 0,03.

Писац овог предмета није убеђен у предност описаног начина за изражавање апсолутне грешке. Навео га је да би читаоце упознао и са другачијим схватањима, те да им остави могућност да бирају.

У сваком случају, ако желимо да експерименталну грешку одредимо са тачношћу већом од једне значајне цифре онда морамо применити статистичке методе које у овом делу још нису обрађене.

### Још неки примери

Решићемо два типична задатка.

***Пример 9***. За а = 1,5 ± 0,3 , b = 13,60 ± 0,09 и c = 2,5 ± 0,2израчунати Y = abc.

Решавање:

Процену грешке треба да изразимо са једном значајном цифром. Према правилима за заокруживање бројева то би дало ΔY = 10. Међутим, будући да се ради о процени грешке, боље је заокруживање извршити нагоре, што даје ΔY = 20. Без обзира да ли за ΔY узимамо вредност 10 или 20, израчунату вредност за Y заокружићемо да десетице, то јест на 50.

Најбоље решење задатка је: Y = 50 ± 20 али ће се тачним сматрати и Y = 50 ± 10. Штавише, ако бисмо применили поступак претходно описан, онда бисмо као решење задатка имали Y = 51 ± 15.1.

***Пример 10***. За вредности a, b, c задатим у претходном примеру израчунати

Решавање**:**

Решење: (најбоље) или : (прихватљиво).